



گزینه ۳

۱

$$\begin{aligned} & \log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{3}+1)} (\log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{3}+1)} + \log_{(\sqrt{5}-2)}^{(9+4\sqrt{5})}) + 1 \xrightarrow{9+4\sqrt{5}=(\sqrt{5}+2)^2} \log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{3}+1)} (\log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{3}+1)} + \log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{5}+2)^2}) + 1 \\ & = \log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{3}+1)} (\log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{3}+1)} + \underbrace{\log_{(\sqrt{5}+2)^2}^{(\sqrt{5}+2)^2}}_{-2}) + 1 = (\log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{3}+1)})^2 - 2(\log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{3}+1)}) + 1 = (\log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{3}+1)} - 1)^2 \\ & = (\log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{3}+1)} - \log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{5}-2)})^2 = (\log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}-2})})^2 = (\log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+2)})^2 = (\log_{(\sqrt{5}-2)}^{(\sqrt{15}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}+2)})^2 \end{aligned}$$

گزینه ۳

۲

$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log[\text{H}^+] \Rightarrow 2/6 = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow \log[\text{H}^+] = -2/6 \\ \Rightarrow [\text{H}^+] &= 10^{-2/6} = 10^{-3} \times 10^{0/6} = 10^{-3} \times 10^{\log 3} = \frac{1}{1000} \times 3 = 0.003 \end{aligned}$$

نکته: $a^{\log_a b} = b$

گزینه ۳

۳

توابع را ساده تر می کنیم.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2^{(x+\frac{1}{2})} - 2^{(x+2)} = 2^{2(x+\frac{1}{2})} - 2^{(x+2)} = 2^{2x+1} - 4(2^x) \\ &= 2(2^x)^2 - 4(2^x) \\ f(x) &= 6(2^x - 2) = 6(2^x) - 12 \end{aligned}$$

توابع را برابر با هم قرار می دهیم.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 6(2^x) - 12 = 2(2^x)^2 - 4(2^x)$$

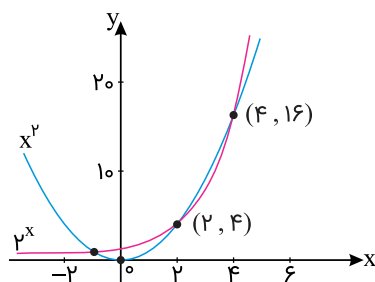
از تغییر متغیر استفاده می کنیم: $2^x = A$

$$6A - 12 = 2A^2 - 4A \Rightarrow 2A^2 - 10A + 12 = 0 \Rightarrow A^2 - 5A + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (A - 3)(A - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 2 = 2^x \Rightarrow x = 1 \\ A = 3 = 2^x \Rightarrow x = \log_2 3 \end{cases}$$

$$\log_2 3 > 1 \Rightarrow b = \log_2 3$$

نمودار تابع $y = 2^x$ و $y = x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده‌ایم.



باید $\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 2^x} > 0$ باشد. باتوجه به اینکه در صورت کسر $x > 0$ است، پس در بازه x های مثبت مقادیری که $x^2 - 2^x > 0$ باشد را می‌خواهیم؛ یعنی $x^2 > 2^x$.

باتوجه به نمودارها در فاصله $(2, 4)$ ، نمودار تابع $y = x^2$ بالای $y = 2^x$ قرار می‌گیرد. پس دامنه تابع بازه $(2, 4)$ است:

$$b - a = 4 - 2 = 2$$

نمودار محور x ها را در نقطه‌ای به طول -1 قطع می‌کند یعنی از نقطه $(-1, 0)$ می‌گذرد و همچنین نیمساز ناحیه چهارم $(y = -x)$ را در عرض -1 قطع می‌کند یعنی از نقطه $(1, -1)$ می‌گذرد. داریم:

$$(-1, 0) \in f \Rightarrow 0 = \log_{\frac{1}{2}}(-a + b) \Rightarrow -a + b = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$(1, -1) \in f \Rightarrow -1 = \log_{\frac{1}{2}}(a + b) \Rightarrow a + b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$$

ابتدا معادله را به فرم ساده‌تری تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{3^{\sqrt{x+3}}}{(2^{\log_2 3})^x} = 3^{-3} \Rightarrow \frac{3^{\sqrt{x+3}}}{(3^{\log_2 2})^x} = 3^{-3} \Rightarrow \frac{3^{\sqrt{x+3}}}{3^x} = 3^{-3} \Rightarrow 3^{\sqrt{x+3}-x} = 3^{-3}$$

بنابراین $\sqrt{x+3} - x = -3$ است.

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} - x = -3 \Rightarrow \sqrt{x+3} = x - 3 \Rightarrow x + 3 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 6$$

ازطرفی باتوجه به گنگ بودن معادله، بایستی جواب‌ها را در معادله اولیه آزمایش کنیم (معادله اولیه: $(\sqrt{x+3} = x - 3)$):

$$\text{اگر } x = 1 \Rightarrow \sqrt{1+3} = 1 - 3 \quad \times$$

$$\text{اگر } x = 6 \Rightarrow \sqrt{6+3} = 6 - 3 \quad \times$$

بنابراین $x = 6$ جواب قابل قبول است.

$$\Rightarrow \log_2(6x - 4) = \log_2(6(6) - 4) = \log_2 32 = 5$$

$$a = \log_{\pi} 2 \Rightarrow \pi^0 < 2 < \pi^1 \xrightarrow{\text{در مبنای } \pi \text{ لگاریتم می‌گیریم}} 0 < \log_{\pi} 2 < 1$$

$$b = \log_2 \pi \Rightarrow 2^1 < \pi < 2^2 \xrightarrow{\text{در مبنای } 2 \text{ لگاریتم می‌گیریم}} 1 < \log_2 \pi < 2$$

$$\Rightarrow 1 < \log_{\pi} 2 + \log_2 \pi < 3$$

$$2 \log_3 (2x - 3) + \log_3 (x^2 + 2x + 1) = 2$$

$$\Rightarrow \log_3 (2x - 3)^2 + \log_3 (x + 1)^2 = \log_3 9$$

$$\Rightarrow \log_3 (2x - 3)^2 (x + 1)^2 = \log_3 9 \Rightarrow (2x - 3)^2 (x + 1)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x - 3)(x + 1) = 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (2x + 3)(x - 2) = 0 \\ (2x - 3)(x + 1) = -3 \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}, \quad x = 2, \quad x = 0, \quad x = \frac{1}{2}$$

از بین جواب‌ها فقط $x = 2$ قابل قبول است.

$$\log_{2\sqrt{2}} 2 = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^1 = \frac{2}{3}$$

معکوس تابع $y = \log_m x$ تابع $y = m^x$ است و در صورتی این دو نمودار یکدیگر را قطع نمی‌کنند که این توابع صعودی باشند، یعنی $m > 1$. بنابراین داریم:

$$10 - a^2 > 1 \Rightarrow a^2 < 9 \Rightarrow -3 < a < 3$$

در این بازه ۵ مقدار صحیح برای a وجود دارد.

$$\begin{aligned} \frac{\log_{25} x - \log_5 x}{\log_5 x - \log_5 x} \times \frac{\log_x 25 \times \log_x 5}{\log_x 25 \times \log_x 5} &= \frac{\log_x 5 - \log_x 25}{\log_x 25 \times \log_5 x \times \log_x 5 - \log_x 25} = \frac{\log_x \left(\frac{5}{25}\right)}{2 \log_x 5 - \log_x 25} \\ &= \frac{\log_x \left(\frac{5}{25}\right)}{\log_x 16 - \log_x 25} = \frac{\log_x \left(\frac{5}{25}\right)}{\log_x \left(\frac{16}{25}\right)} = \log_{\left(\frac{16}{25}\right)} \left(\frac{5}{25}\right) = \log_{\left(\frac{4}{5}\right)} \left(\frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

توجه: می‌توان عبارت صورت سؤال را در کسرهای دیگری هم ضرب کرد، اما جواب نهایی یکسان است.